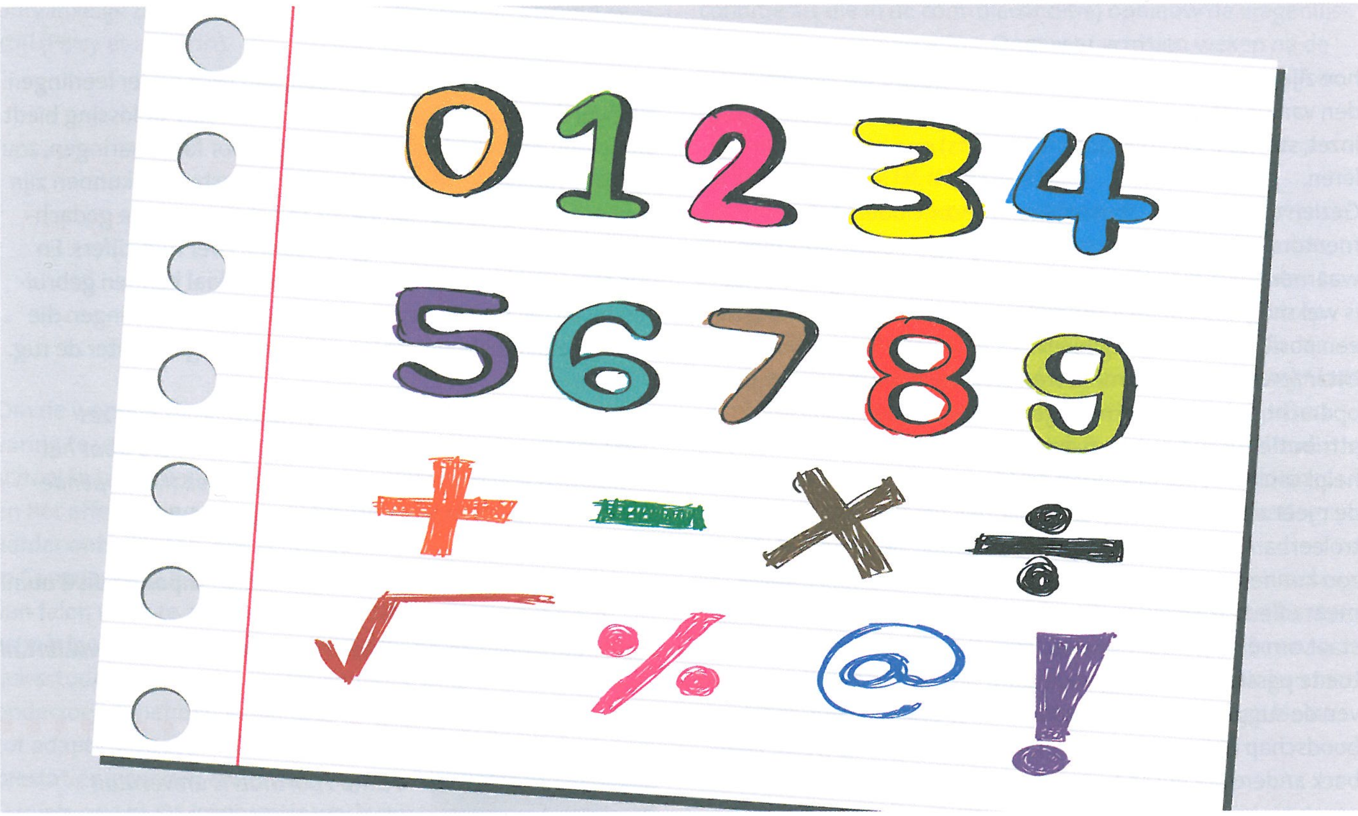
Laat het rekenonderwijs profiteren van theorie over wiskunde leren

Breuken in leerlijnen



Een van de pijnpunten die de aansluiting tussen primair en voortgezet onderwijs bemoeilijkt, is de kloof tussen het primair rekenonderwijs en het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. De leerlijnen voor rekenen zouden die kloof moeten overbruggen, maar vertonen gebreken. Daardoor blijft de overgang van concreet naar abstract rekenen voor veel leerlingen lastig. Als alternatief stelt hoogleraar Koeno Gravemeijer, gespecialiseerd in reken- en wiskundeonderwijs, voor om een gangbare theorie over het leren van reken- en wiskunde als uitgangspunt te nemen. Als we dit gedachtegoed al op de basisschool kunnen introduceren, zou er veel gewonnen zijn. Maar eerst een lesje rekenen!

Tekst: Koeno Gravemeijer

Een duidelijk voorbeeld van een onderbroken leerlijn zie je terug in het reken- en wiskundeonderwijs rond breuken. Geeke Bruin-Muurling (Bruin-Muurling, Gravemeijer & Van Eijck, 2010) deed onderzoek naar het vermenigvuldigen ervan. Zij analyseerde de schoolboeken van het primair en voortgezet onderwijs (po/vo). Hieruit bleek dat kinderen op de basisschool bij het rekenen weliswaar beginnen met contextgebonden oplossingsstrategieën, maar de stap naar een hoger, abstracter denkniveau maken ze in deze fase niet. In plaats daarvan verschuift de aandacht naar een opgavespecifieke benadering, waarmee de kinderen langdurig oefenen. Vanuit het oogpunt van taakgerichtheid is dit goed te begrijpen: zo krijgen ze immers effectieve handvatten voor specifieke opgaven, waarmee ze goede resultaten kunnen behalen.

PIZZA'S EN MELK

Het onderzoek laat echter zien dat er problemen ontstaan wanneer leerlingen op de havo of vwo komen. Daar krijgen ze de standaardregel voor het vermenigvuldigen van breuken aangeboden; 'teller keer teller, gedeeld door noemer keer noemer'. Met als uitgangspunt dat het fundament hiervoor in het basisonderwijs is gelegd. En daar wringt de schoen, want dat is meestal niet het geval.

Niet alleen betekent dit voor de leerling een nieuwe regel naast de regels die hij al kent, maar bovenal vereist het begrijpen van die regel dat leerlingen breuken kunnen zien als abstracte 'objecten', oftewel onbenoemde getallen. Voor veel leerlingen die van de basisschool komen zijn breuken daarentegen nog sterk gebonden aan concrete voorwerpen en maateenheden. Zoals in ¾ pizza of 1½ liter melk. De vermenigvuldigregel overstijgt dit niveau van concreetheid, daarbij gaat het niet meer om pizza's of liters melk.

Dat is nog niet alles. Om de juistheid van deze regel echt te kunnen begrijpen, moet het vermenigvuldigen en delen op een hoger plan komen. Die handelingen zelf moeten ook 'objecten' worden, waarmee de leerling kan redeneren. Die moet namelijk inzien dat:

- je een handeling als 'x ¾' kunt splitsen in twee handelingen: 'x 3' en ': 4'
- je een breuk met een geheel getal kunt vermenigvuldigen door de teller met dat getal te vermenigvuldigen
- je een breuk door een geheel getal kunt delen door de noemer met dat getal te vermenigvuldigen.

Wanneer deze inzichten zijn verworven, kan een leerling beredeneren dat ⅖ x ¾ = (2 x 3) : (5 x 4). Want: ⅖ x 3 = (2 x 3)/5 en [(2 x 3)/5] : 4 = (2 x 3)/(5 x 4). Pas dan kan hij generaliseren naar de algemene regel 'teller keer teller gedeeld door noemer keer noemer' voor het vermenigvuldigen van willekeurig welke breuken. Dit alles komt in het basisonderwijs niet aan de orde.

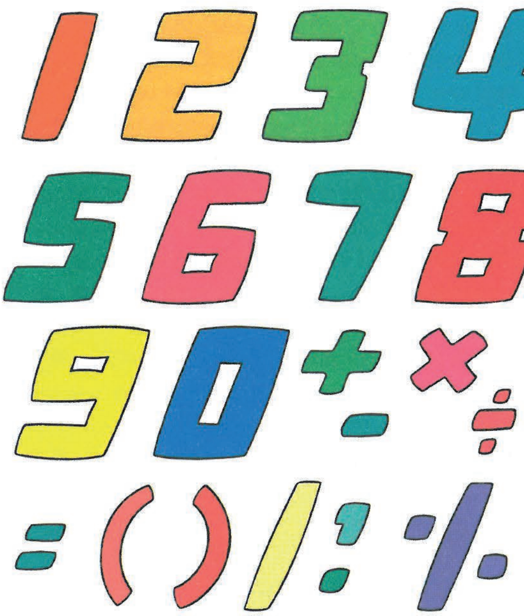
Voor leerlingen die doorstromen naar havo en vwo, is er met andere woorden geen sprake van een doorgaande leerlijn tussen primair en voortgezet onderwijs. De regel voor het vermenigvuldigen van breuken zal daarom voor veel leerlingen onbegrepen blijven. Daar komt nog bij dat vo-methoden in het algemeen onvoldoende aandacht besteden aan verdere ontwikkeling van breukenkennis en -vaardigheden. Althans, dat was het geval in 2010, toen Bruin-Muurling haar onderzoek deed. Inmiddels kan dit veranderd zijn door de toegenomen aandacht voor rekenen in het voortgezet onderwijs. Vermoedelijk is er echter nog steeds weinig oog voor de geschetste samenhangen tussen breuken enerzijds en vermenigvuldigen en delen anderzijds. Zonder dit onderliggende inzicht blijft de vermenigvuldigregel arbitrair en kwetsbaar voor fouten. Dat blijkt ook uit de resultaten die Bruin-Muurling vond.

'Het abstracte karakter van rekenen en wiskunde maakt dat je de leerstof niet als kant-en-klare kennis kunt overdragen'

DE BEPERKING VAN TAAKSPECIFIEK REKENEN

De huidige vorm van beschrijven en toetsen van doorlopende leerlijnen biedt geen oplossing. Op dit moment organiseren we leerlijnen rond operationele doelen: wat de leerlingen moeten beheersen, en wat we kunnen toetsen. Goede antwoorden op toetsen zijn evenwel op verschillende manieren bereikbaar. Ze kunnen voortkomen uit wiskundig inzicht, maar ook uit feiten en regels die uit het hoofd geleerd zijn. Bovendien werkt toetsing van het beheersen van opgavetypen in de hand dat leerkrachten, remedial teachers en schoolboeken zich richten op opgavespecifieke strategieën. En dat is precies wat Muurling in de basisschoolmethoden aantrof: contextgebonden oplossingen voor het vermenigvuldigen van breuken, vertaald in oplossingsstrategieën waarmee leerlingen langdurig oefenen.

Een voorbeeld van een contextgebonden oplossing is 5 x ¾ liter uitrekenen via ¾ + ¾ + ¾ + ¾ + ¾, denkend aan 5 pakjes van ¾ liter. Deze manier werkt goed en het is daarom verleidelijk hiermee veel te oefenen en de leerling bij alle vermenigvuldigingen met een breuk herhaald te laten optellen. Op vergelijkbare wijze is ¾ van 60 liter uit te rekenen: ¼ van 60 liter = 15 liter, dus ¾ van 60 liter is 3 x 15 = 45. Dit leidt tot de methode: Vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal. Je deelt eerst door de noemer (¼ deel van 60 = 60 : 4) en daarna vermenigvuldig je het resultaat met de teller (3 x 15). Op zich is het uiteraard prima om oplossingsstrategieën te verankeren in betekenisvolle contexten. Maar als leerlingen dit steeds zo doen, raakt die verbinding op de achtergrond en



blijft er een uit het hoofd geleerd regeltje over.
Muurling onderscheidt nog twee andere getalspecifieke strategieën die goed werken als het gaat om specifieke opgavetypen. Het is begrijpelijk dat leerkrachten en rt'ers hiervoor kiezen, zeker als het gaat om goede antwoorden op individuele toetsopgaven. Maar uiteindelijk zijn leerlingen er, met het oog op het toekomstig wiskundeonderwijs, niet mee geholpen.

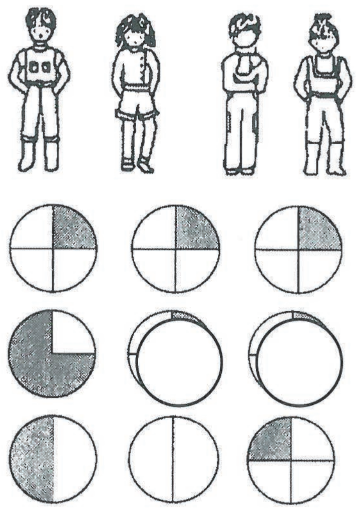
VAN FYSIEK TELLEN NAAR ABSTRACT REDENEREN

Een alternatieve mogelijkheid is om aan de andere kant te beginnen, bij theorieën over het leren van wiskunde en rekenen. De huidige, algemeen aanvaarde, opvatting is dat het hierbij gaat om construeren. Het abstracte karakter van rekenen en wiskunde maakt dat je de leerstof niet als kant-en-klare kennis kunt overdragen (zie ook Gravemeijer, 2010).
Er is in het aanvankelijk rekenen bijvoorbeeld een fase waarin jonge kinderen geen antwoord kunnen geven op de vraag, 'Hoeveel is 3 + 4?', terwijl ze wel weten dat 3 fysieke blokjes met 4 blokjes erbij 7 blokjes maakt. Het probleem is hier dat getallen nog gebonden zijn aan groepjes telbare objecten. De getallen fungeren bij wijze van spreken als bijvoeglijke naamwoorden. Anders gezegd, jonge kinderen kunnen wel uit de voeten met benoemde, maar nog niet met onbenoemde getallen.
Daar is een zogeheten 'constructieproces' voor nodig. Dit begint bij resultatief tellen, wat leidt tot vorming van het hoeveelheidsgetal. Het structureren en combineren van hoeveelheidsgetallen leidt op zijn beurt tot vorming van getallen als zelfstandige wiskundige objecten. Het getal is dan niet langer gebonden aan concrete telbare objecten, maar ontleent zijn betekenis aan de relaties met andere getallen. Zoals 7 = 4 + 3; 7 = 5 + 2; 7 = 10 – 3; 7 + 7 = 14 enzovoort.

Leerlingen die dit beheersen, kunnen redeneren met onbenoemde getallen. Ze kunnen gebruikmaken van het netwerk van getalrelaties dat de getallen aan elkaar verbindt, en hoeven niet meer terug naar concrete telbare objecten. Voor de goede orde: het gaat hier niet om het blind generaliseren van allerlei contexten, om zo tot de conclusie te komen dat een bepaalde getalrelatie, zoals 4 + 3 = 7, altijd geldt. De leerlingen moeten ervaring opdoen met het beredeneren van 4 + 3 = 7, bijvoorbeeld door vanaf 4, 3 verder te tellen. Deze doortelstrategie moet dan weer gebaseerd zijn op het inzicht dat zij voortkomt uit het resultatief tellen.

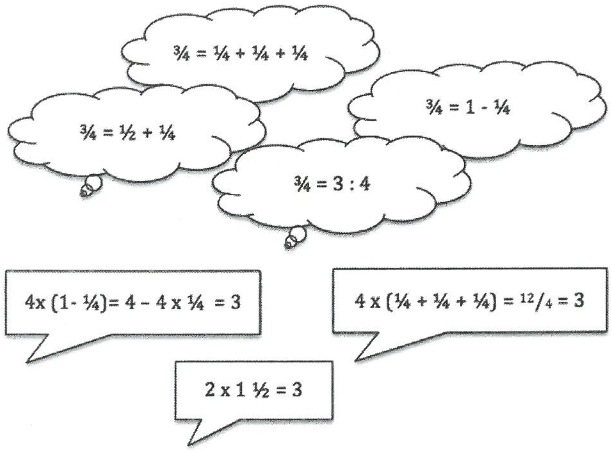
DENKEN IN GETALRELATIES

Ook bij breuken is zo'n proces noodzakelijk (Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen & Keijzer, 2006). Ook hier moet een overgang plaatsvinden van de breuk als hoeveelheidsgetal – de benoemde breuk – naar de breuk als wiskundig object. En ook hier moet zich een relatienet vormen, met getallen als knooppunten in dat net. Op eenzelfde manier moeten breuken hun betekenis gaan ontlenen aan getalrelaties. Bij $\frac{3}{4}$ zijn dat bijvoorbeeld relaties als: $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ of $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$. Maar ook: $3 : 4 = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} = 6/8 = 9/12 = 12/16$, en $\frac{3}{4}$ van 100 is 75 enzovoort.
De door Streefland ontwikkelde activiteit van 'eerlijk verdelen', kan hier van nut zijn. De leerling krijgt bijvoorbeeld de vraag 3 pizza's eerlijk te verdelen over 4 kinderen; een opdracht die je op verschillende manieren kunt uitvoeren (zie figuur 1).



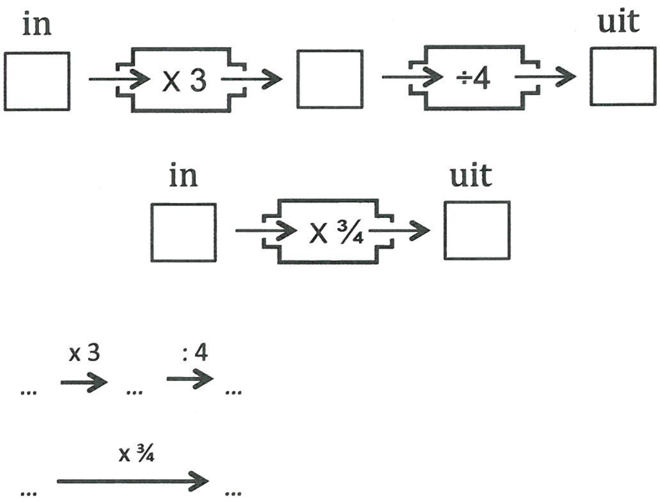
Figuur 1. Vier kinderen verdelen drie pizza's.

De gevonden relaties kan de leerling gebruiken om nieuwe relaties te vinden (*derived facts*). Zo kunnen de relaties $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ van pas komen bij het vinden van de uitkomst van $2 \times \frac{3}{4}$ = ... En die uitkomst weer voor het beantwoorden van $4 \times \frac{3}{4}$ = ... Waarvan het antwoord uiteraard ook op verschillende manieren te vinden is (zie figuur 2).



Figuur 2. Getalrelaties gebruiken om 4 x ¾ uit te rekenen.

De leerling zou bovendien nog ¾ = 3 : 4 kunnen gebruiken als hij x ¾ zou opvatten als twee opeenvolgende handelingen, 'x 3' en ': 4'. Dit idee kun je duidelijk maken met pijlentaal of machientjes (zie figuur 3).



Figuur 3. Samenhang tussen breuken en vermenigvuldigen en delen.

Uiteraard komen ook regels aan bod. Die zijn impliciet al in bovenstaande activiteiten zichtbaar. Ze ontwikkelen zich in samenhang met het relatienet, door reflectie op de gevonden oplossingen.

'Het voordeel van werken met getalrelaties is dat er vele wegen naar Rome leiden. En: hoe meer mogelijkheden, hoe zekerder de leerling zich voelt'

ANDERSOORTIGE LEERLIJNEN

Wanneer we de voortgang in het leerproces willen monitoren, is het van belang dat we ons richten op het denken van de leerling. Operationele doelen volstaan dan niet. Bovendien werkt het sturen op operationele doelen en toetsen in de hand dat het onderwijs zich kenmerkt door opgavespecifieke strategieën. Een mogelijke oplossing is kinderen – al op de basisschool – te leren denken in netwerken van getalrelaties. Geleidelijk kunnen die een steeds meer opzichzelfstaande wereld gaan vormen, zodat de leerling niet steeds terug hoeft naar het niveau van concrete hoeveelheden. De kracht van dit soort netwerken is bovendien, dat er 'vele wegen naar Rome' zijn. Dit gegeven vergroot niet alleen de flexibiliteit maar ook het gevoel van zekerheid van de leerling: hoe meer verbindingen, hoe meer zekerheid.
Willen we de theorie over het construeren van rekenen en wiskundige kennis als uitgangspunt nemen, dan vraagt dat om een fundamentele herziening van de inrichting van het reken- en wiskundeonderwijs. Een herziening die uitstekend zou passen in het streven naar het ontwikkelen van 21*st century skills*, zoals het probleem-oplossen, communiceren en samenwerken.

Correspondentieadres: **koeno@gravemeijer.nl**

Koeno Gravemeijer is emeritus professor science- en techniekeducatie aan de Technische Universiteit Eindhoven. Zijn belangstelling gaat vooral uit naar reken- en wiskundeonderwijs dat leerlingen voorbereidt op de maatschappij van de toekomst.

LITERATUUR

- Bruin-Muurling, G., Gravemeijer, K.P.E., & Van Eijck, M.W. (2010). *Aansluiting schoolboeken basisschool en havo/vwo*. Nieuw Archief voor Wiskunde, 5(11), 33-37.
- Gravemeijer, K. (2010). *Wat is het probleem*. Euclides, 86, 62-69.
- Van Galen, F., Van Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Van Herpen, E. & Keijzer, R. (2006). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen: tussendoelen annex leerlijnen bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.